(d) Evaluate $\frac{d}{dt}\left[\vec{r}\ \frac{d\vec{r}}{dt}\ \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\right]$ 2

मान निकालिए $\frac{d}{dt}\left[\vec{r}\ \frac{d\vec{r}}{dt}\ \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\right]$

(e) What is the greatest rate of increase of 2

$u = xyz^2$ at the point (0,1,2)

बिन्दु (0,1,2) पर $u = xyz^2$ के वृद्धि की अधिकतम दर क्या है ?

(f) If $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$ then find $div\ \vec{r}$ 2

यदि $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$ तो $div\ \vec{r}$ को ज्ञात कीजिए।



*Roll No.* .....

# 91580

## B. Sc. 2nd Sem. (Math) (Pass Course) Examination – April, 2018

### VECTOR CALCULUS MATH - III

**Paper : BM-123**

*Time : Three Hours ]* *[ Maximum Marks : 40*

*Before answering the questions, candidates should ensure that they have been supplied the correct and complete question paper. No complaint in this regard, will be entertained after examination.*

*प्रश्नों के उत्तर देने से पहले परीक्षार्थी यह सुनिश्चित कर लें कि उनको पूर्ण एवं सही प्रश्न-पत्र मिला है। परीक्षा के उपरान्त इस संबंध में कोई भी शिकायत नहीं सुनी जायेगी।*

***Note :*** Attempt ***five*** questions in all choosing ***one*** question from each Section. Question No. **9** (Section – **V**) is ***compulsory***.

प्रत्येक खण्ड से ***एक*** प्रश्न चुनते हुए, कुल ***पाँच*** प्रश्न कीजिए। प्रश्न संख्या 9 (खण्ड-V) *अनिवार्य* है।

## SECTION – I
## खण्ड – I

**1.** (a) Let $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ be three non-coplaner vector and $\vec{a}',\vec{b}',\vec{c}'$ be the reciprocal vector then for any vector $\vec{r}$, show that $\vec{r}=(\vec{r}.\vec{a})\vec{a}'+(\vec{r}.\vec{b})\vec{b}'+(\vec{r}.\vec{c})\vec{c}'$. 3

माना $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ तीन मैट-समकालीन वेक्टर है तथा $\vec{a}',\vec{b}',\vec{c}'$ व्युत्क्रम वेक्टर है तब किसी वेक्टर $\vec{r}$ हेतु दिखाइए कि $\vec{r}=(\vec{r}.\vec{a})\vec{a}'+(\vec{r}.\vec{b})\vec{b}'+(\vec{r}.\vec{c})\vec{c}'$

(b) Prove that :

$$\left[\vec{p}\times\vec{q}\ \ \vec{q}\times\vec{r}\ \ \vec{r}\times\vec{p}\right]=\begin{vmatrix}\vec{p}.\vec{p} & \vec{p}.\vec{q} & \vec{p}.\vec{r}\\ \vec{q}.\vec{p} & \vec{q}.\vec{q} & \vec{q}.\vec{r}\\ \vec{r}.\vec{p} & \vec{r}.\vec{q} & \vec{r}.\vec{r}\end{vmatrix}=\left[\vec{p}\ \ \vec{q}\ \ \vec{r}\right]^2 \quad 4$$

सिद्ध कीजिए कि :

$$\left[\vec{p}\times\vec{q}\ \ \vec{q}\times\vec{r}\ \ \vec{r}\times\vec{p}\right]=\begin{vmatrix}\vec{p}.\vec{p} & \vec{p}.\vec{q} & \vec{p}.\vec{r}\\ \vec{q}.\vec{p} & \vec{q}.\vec{q} & \vec{q}.\vec{r}\\ \vec{r}.\vec{p} & \vec{r}.\vec{q} & \vec{r}.\vec{r}\end{vmatrix}=\left[\vec{p}\ \ \vec{q}\ \ \vec{r}\right]^2$$

**2.** (a) Prove that the necessary and sufficient condition for a vector function $\vec{f}$ of a scalar variable t to have constant direction is $\vec{f}\times\frac{d\vec{f}}{dt}=0$. 3



सिद्ध कीजिए कि नियतांक दिशा वाले आदिश चर t के वेक्टर फलन $\vec{f}$ हेतु आवश्यक तथा पर्याप्त शर्त $\vec{f}\times\frac{d\vec{f}}{dt}=0$ है।

(b) A particle moves along the curve $x=3t^2-2$, $y=2t-t^2, z=t^3+4$. Find the velocity and acceleration at t = 2. 4

एक कण वक्र $x=3t^2-2$, $y=2t-t^2, z=t^3+4$ के समानान्तर गति करता है तो t = 2 पर वेग तथा त्वरण को ज्ञात कीजिए।

## SECTION – II
## खण्ड – II

**3.** (a) If $\vec{r}=x\hat{i}+y\hat{j}+z\hat{k}$ and $|\vec{r}|=r$ then prove that div $\left(r^m\vec{r}\right)=(m+3)r^m$. 4

यदि $\vec{r}=x\hat{i}+y\hat{j}+z\hat{k}$ रूप $|\vec{r}|=r$ को सिद्ध कीजिए कि $\left(r^m\vec{r}\right)=(m+3)r^m$

(b) If $\vec{r}=x\hat{i}+y\hat{j}+z\hat{k}$ and $\vec{b}$ is constant vector then find curl $\left(\vec{b}\times\vec{r}\right)r^n$. 3

यदि $\vec{r}=x\hat{i}+y\hat{j}+z\hat{k}$ एवं $\vec{b}$ नियतांक वेक्टर है तो curl $\left(\vec{b}\times\vec{r}\right)r^n$ को ज्ञात कीजिए।

4. (a) Find the equation of tangent plane and normal to the surface $z = x^2 + y^2$ at the point (1, –2, 5). 3

बिन्दु (1, –2, 5) पर पृष्ठ $z = x^2 + y^2$ के अभिलम्ब तथा स्पर्शी समतल के समीकरण को ज्ञात कीजिए।

(b) Find the values of constants p and q so that the surfaces $px^2 - qyz = (p+2)x$ will be orthogonal to the surface $4x^2y + z^3 = 9$ at the point (1, –2, 1). 4

नियतांक p एवं q के मान को ज्ञात कीजिए जिससे पृष्ठ $px^2 - qyz = (p+2)x$ बिन्दु (1, –2, 1) पर पृष्ठ $4x^2y + z^3 = 9$ के लम्बकोणीय होगा।

## SECTION – III

## खण्ड – III

5. (a) Find the value of curl of a vector function $\vec{f}$ in terms of orthogonal curvilinear co-ordinates. 3

लम्बकोणीय वक्ररेखीय निर्देशांक के अनुसार वेक्टर फलन $\vec{f}$ के कर्ल के मान को ज्ञात कीजिए।

(b) If $u = 3x + 4, v = y - 3, w = z + 2$ show that u, v, ware orthogonal and find $(ds)^2$. Also find the scale factors $h_1, h_2, h_3$. 4



यदि $u = 3x + 4, v = y - 3, w = z + 2$ तो दिखाइए कि u, v लम्बकोणीय है तथा $(ds)^2$ को ज्ञात कीजिए। स्केल गुणनखण्ड $h_1, h_2, h_3$ को भी ज्ञात कीजिए।

6. (a) Express the following vectors in cylindical co-ordinates.

$$\vec{f} = xy\hat{i} + 3yz\hat{j} + (z^2 - yz)\hat{k}$$ 4

निम्न वेक्टरों को बेलनाकार निर्देशांक

$\vec{f} = xy\hat{i} + 3yz\hat{j} + (z^2 - yz)\hat{k}$ में व्यक्त कीजिए।

(b) Prove that spherical co-ordinate system is self reciprocal. 3

सिद्ध कीजिए कि गोलीय निर्देशांक प्रभावी व्युत्क्रम है।

## SECTION – IV

## खण्ड – IV

7. (a) Find the workdone in moving a particle once round a circle C in xy - plane having centre at origin and radius 3. If the force field is $\vec{f} = (2x - 4y + 3z)\hat{i} + (x + 2y - z)\hat{j} + (3x - 2y - 5z)\hat{k}$. 3

उद्गम तथा त्रिज्या 3 पर केन्द्र वाले xy समतल में वृत्त C का एक चक्कर कण के गति करने में किये गये कार्य को ज्ञात कीजिए यदि बल क्षेत्र

$\vec{f} = (2x - 4y + 3z)\hat{i} + (x + 2y - z)\hat{j} + (3x - 2y - 5z)\hat{k}$ है।

(b) Varify Gauss divergence theorem for $\vec{f} = 2xz\hat{i} - y^2\hat{j} + 3yz\,\hat{k}$ over the surface of the cube bounded by $0 \le x \le 2$ $0 \le y \le 2$, $0 \le z \le 2$. 4

$0 \le x \le 2$ $0 \le y \le 2$, $0 \le z \le 2$ द्वारा परिबद्ध घन के पृष्ठ पर $\vec{f} = 2xz\hat{i} - y^2\hat{j} + 3yz\,\hat{k}$ हेतु गॉस डाइवर्जेन्स प्रमेय का सत्यापन कीजिए।

**8.** (a) Verify Green's theorem in plane for $\oint_C (xy + y^2)dx + x^2dy$, where C is the closed curve of the region bounded by $y = x, y = x^2$. 3

$\oint_C (xy + y^2)dx + x^2dy$ हेतु समतल में ग्रीन प्रमेय का सत्यापन कीजिए जहाँ C $y = x, y = x^2$ द्वारा परिबद्ध क्षेत्र का अवरुद्ध वक्र है।

(b) Using stoke's theorem, evaluate 4

$\oint_C (2x + 2y)dx + (2x - z)dy + (y + z)dz$ where C is the boundary of the triangle with vertices (1,0,0), (0,3,0) and (0,0,4).



स्टोक के प्रमेय का प्रयोग करते हुए मान निकालिए $\oint_C (2x + 2y)dx + (2x - z)dy + (y + z)dz$ जहाँ C लम्ब (1,0,0), (0,3,0) और (0,0,4) उसके साथ त्रिकोण की परिसीमा है।

## SECTION – V

## खण्ड – V

**9.** (a) If S is any closed surface enclosing a volume V and $\vec{f} = x\hat{i} + 2y\hat{j} + 3z\hat{k}$ then show that $\iint_S \vec{f}.\hat{n}\,ds = 6V$. 2

यदि S आयतन V एवं $\vec{f} = x\hat{i} + 2y\hat{j} + 3z\hat{k}$ को परिबद्ध करते हुए कोई अवरुद्ध पृष्ठ है तो दिखाइए कि $\iint_S \vec{f}.\hat{n}\,ds = 6V$।

(b) Describe the following curve in rectangular Co-ordinates, which is given in cylindrical Co-ordination P = 3, z = 0. 2

निम्न वक्र का वर्णन आयताकार निर्देशांक में कीजिए जिसे बेलनाकार निर्देशांक P = 3, z = 0 में दिया गया है।

(c) If $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, $z = z$, find $\nabla\theta$. 2

यदि $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, $z = z$, $\nabla\theta$ को ज्ञात कीजिए।