Roll No. ....

41121

B. A. (Pass Course & Vocational)
4th Semester Examination – May, 2019

MATHS-I (SEQUENCES AND SERIES)

Paper : 12BAM241

Time : Three Hours] *[Maximum Marks : 27*

Before answering the questions, candidates should ensure that they have been supplied the correct and complete question paper. No complaint in this regard, will be entertained after examination.

प्रश्नों के उत्तर देने से पहले परीक्षार्थी यह सुनिश्चित कर लें कि उनको पूर्ण एवं सही प्रश्न-पत्र मिला है। परीक्षा के उपरान्त इस संबंध में कोई भी शिकायत नहीं सुनी जायेगी।

Note : Attempt ***five*** questions in all selecting ***one*** question from each section **I** to **IV**. Question No. **9** of Section-**V** is ***compulsory***.

प्रत्येक खण्ड **I** से **IV** से एक चुनते हुए, कुल ***पाँच*** प्रश्नों के उत्तर दीजिए। खण्ड-**V** का प्रश्न सं० **9** ***अनिवार्य*** है।

SECTION – I
खण्ड – I

1. (a) Prove that every non-empty subset of real numbers which is bounded below has a real number as infimum. $2\frac{1}{2}$

P. T. O.

सिद्ध कीजिए कि वास्तविक संख्याएँ जो नीचे परिबद्ध है का प्रत्येक गैर रिक्त उपसमुच्चय में निम्निष्ठ के रूप में वास्तविक संख्या है।

(b) Prove that interior of a set is an open set. 2

सिद्ध कीजिए कि समुच्चय का अंतरंग अनावृत्त समुच्चय है।

2. (a) A set is closed iff it contains all its limit points. $2\frac{1}{2}$

एक समुच्चय अनावृत्त होता है यदि इसमें इसकी सभी परिसीमा बिन्दुएँ होती है।

(b) If a set $A \subseteq R$ satisfies the Heine Borel property, then any closed subset of A also satisfies the Heine Borel property. 2

यदि समुच्चय $A \subseteq R$ हेनी बॉरेल विशेषता को पूरा करता है तो A का कोई आवृत्त उपसमुच्चय भी हेनी बॉरेल विशेषता को पूरा करता है।

SECTION – II
खण्ड – II

3. (a) Prove that : $2\frac{1}{2}$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^n}{\lfloor n}\right)^{\frac{1}{n}} = e$$

(e) State Gauss test.

गास परीक्षण बताइए।

(f) Define absolute convergence and cond

convergence of $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ के पूर्व अभिसरण तथा प्रतिबन्धी अभिसर

परिभाषा बताइए।

(b) Show that the infinite product $\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\left(1-\frac{1}{4^2}\right)$ is convergent. 2

दिखाइए कि अपरिमित गुणनफल $\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\left(1-\frac{1}{4^2}\right)$ अभिसारी है।

SECTION – V
खण्ड – V

Find supremum and infimum of the set $\left\{1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \ldots\ldots\right\}$. $1\frac{1}{2} \times 6 = 9$

समुच्चय $\left\{-1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \ldots\ldots\right\}$ के उच्चिष्ठ एवं निम्निष्ठ को ज्ञात कीजिए।

Define an open set. Give an example of an open set.

विवृत समुच्चय की परिभाषा बताइए। अनावृत समुच्चय का उदाहरण दीजिए।

Define compact set.

संहत समुच्चय की परिभाषा बताइए।

Discuss the convergence of the series $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n+1}$.

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n+1}$ के अभिसरण की चर्चा कीजिए।

सिद्ध कीजिए कि :

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^n}{\lfloor n}\right)^{\frac{1}{n}} = e$$

(b) A sequence converges if and only if it is a Cauchy sequence. 2

एक अनुक्रम अभिसरण करता है यदि तथा केवल यदि यह काशी अनुक्रम होता है।

4. (a) Test the convergence of the series $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n+x}, x>0$. $2\frac{1}{2}$

श्रेणी $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n+x}, x>0$ के अभिसरण का परीक्षण कीजिए।

(b) Examine the convergence of the series $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(\log n)^{\log n}}$ 2

श्रेणी $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(\log n)^{\log n}}$ के अभिसरण का परीक्षण कीजिए।

SECTION – III
खण्ड – III

5. (a) State and Prove D'Alembert's ratio test for the convergence of an infinite series. $2\frac{1}{2}$

अपरिमित श्रेणीयाँ के अभिसरण हेतु डी अलम्बर्ट के अनुपात को बताइए तथा सिद्ध कीजिए।

(b) Discuss the convergence of the series : 2

$$\frac{1}{2}+\frac{2}{3}.x+\left(\frac{3}{4}\right)^2.x^2+\left(\frac{4}{5}\right)^3x^3+\ldots\ldots$$

श्रेणी $\frac{1}{2}+\frac{2}{3}.x+\left(\frac{3}{4}\right)^2.x^2+\left(\frac{4}{5}\right)^3x^3+\ldots\ldots$ के अभिसरण का परीक्षण कीजिए।

6. (a) Test the convergence of the series $\frac{1}{2^2}+\frac{1^2.3^2}{2^2.4^2}x+\frac{1^2.3^2.5^2}{2^2.4^2.6^2}x^2+\ldots\ldots$ $2\frac{1}{2}$

श्रेणी $\frac{1}{2^2}+\frac{1^2.3^2}{2^2.4^2}x+\frac{1^2.3^2.5^2}{2^2.4^2.6^2}x^2+\ldots\ldots$ के अभिसरण का परीखण कीजिए।

(b) Using Cauchy's condensation test, discuss the convergence of the series $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\log n}{n}$. 2

काशी संघनन का प्रयोग करते हुए श्रेणी $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\log n}{n}$ के अभिसरण का परीक्षण, चर्चा कीजिए।

SECTION – IV
खण्ड – IV

7. (a) Show that the series $\frac{\log^2}{2^2}-\frac{\log^3}{3^2}+\frac{\log^4}{4^2}$ converges.

दिखाइए कि श्रेणी $\frac{\log^2}{2^2}-\frac{\log^3}{3^2}+\frac{\log^4}{4^2}$ अभिसरण करता है।

(b) Test the convergence of the series :

$$\sum_{n=3}^{\infty}\frac{(n^3+1)^{1/3}-n}{\log n}$$

श्रेणी $\sum_{n=3}^{\infty}\frac{(n^3+1)^{1/3}-n}{\log n}$ के अभिसरण का ı
कीजिए।

8. (a) Show that Cauchy product of the conve
series $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$ with itself is divergent.

दिखाइए कि अभिसारी श्रेणी $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$ का गुणनफल स्वयं में अपसारी है।