

सिद्ध कीजिए कि :

$$\int_{-1}^1 P_0(x) dx = 2$$

(d) Find Laplace transform of :

$$\{e^{2t} + 4t^3 - 2 \sin 3t\}$$

$\{e^{2t} + 4t^3 - 2 \sin 3t\}$ के लाप्लास रूपांतरण को ज्ञात कीजिए।

(e) Find :

$$L^{-1} \left\{ \frac{1}{s^2} \right\}$$

$$L^{-1} \left\{ \frac{1}{s^2} \right\} \text{ को ज्ञात कीजिए।}$$

(f) Find Fourier cosine transform of $2e^{-5x}$.

$2e^{-5x}$ के फोरियर कोज्या रूपांतरण को ज्ञात कीजिए।

(8)

Roll No.

41122

**B.A. (Pass Course & Vocational)
4th Semester Examination – May, 2019**

MATHS - II (SPECIAL FUNCTIONS AND INTEGRAL TRANSFORMS)

Paper : 12BAM242

Time : Three hours] / Maximum Marks : 27

Before answering the questions, candidates should ensure that they have been supplied the correct and complete question paper. No complaint in this regard, will be entertained after examination.

प्रश्नों के उत्तर देने से पहले परीक्षार्थी यह सुनिश्चित कर लें कि उनको पूर्ण एवं सही प्रश्न-पत्र मिला है। परीक्षा के उपरान्त इस संबंध में कोई भी शिकायत नहीं सुनी जायेगी।

Note : Attempt *five* questions in all, selecting *one* question from each Section (I to IV). Question No. 9 (Section V) is *compulsory*.

प्रत्येक खण्ड (I से IV) से एक प्रश्न चुनते हुए, कुल पाँच प्रश्नों के उत्तर दीजिए। प्रश्न संख्या 9 (खण्ड - V) अनिवार्य है।

P. T. O.

SECTION - I

खण्ड - I

1. (a) Find the power series solution of the differential

$$\text{equation } (x^3 - 1) \frac{d^2 y}{dx^2} + x^2 \frac{dy}{dx} + xy = 0 \text{ in powers}$$

of x . $2 \frac{1}{2}$ x के घात में अवकल समीकरण

$$(x^3 - 1) \frac{d^2 y}{dx^2} + x^2 \frac{dy}{dx} + xy = 0 \text{ के घात श्रेणी हल}$$

को ज्ञात कीजिए।

(b) Solve the following differential equation in power series : 2

$$4x \frac{d^2 y}{dx^2} + 2 \frac{dy}{dx} + y = 0$$

घात श्रेणी में निम्न अवकल समीकरण को हल कीजिए :

$$4x \frac{d^2 y}{dx^2} + 2 \frac{dy}{dx} + y = 0$$

2. (a) Show that $J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x)$, where n is any integer. $2 \frac{1}{2}$ दिखाए कि $J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x)$ जहाँ n कोई पूर्णांक है।(b) Use Jacobis series to show that $[J_0(x)]^2 + 2[J_1(x)]^2 + 2[J_2(x)]^2 + \dots = 1$. 2

(2)

परिस्थिति में घात $\frac{\partial u}{\partial x} = 0$, के

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}; 0 < x < \pi, \text{ को हल करने के लिए}$$

परिचित कोरियर कोट्या रूपान्तरण का प्रयोग कीजिए।

जहाँ $x = 0$ एवं $x = \pi, t > 0$ एवं आरंभिक $u = f(x)$ है। जब $t = 0, 0 < x < \pi$ ।

SECTION - V

खण्ड - V

9. (a) What is regular singular point of a differential equation. Give example. $1 \frac{1}{2} \times 6 =$

अवकल समीकरण का सममित विशिष्ट अंक क्या है उदाहरण दीजिए।

(b) Show that :

$$J_{-1/2}(x) = J_{1/2}(x) \cdot \cot x$$

सिद्ध कीजिए कि :

$$J_{-1/2}(x) = J_{1/2}(x) \cdot \cot x$$

(c) Prove that :

$$\int_{-1}^1 P_0(x) dx = 2$$

(7)

सिद्ध कीजिए कि :

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-x^2} [H_n(x)]^2 dx = \sqrt{\pi} 2^n \frac{n!}{n+2}$$

SECTION - III

खण्ड - III

5. (a) Evaluate Laplace Transform of : $2 \frac{1}{2}$

$$\int_0^t \frac{e^t \sin t dt}{t}$$

के लाप्लास रूपांतरण का मान निकालिए।

- (b) Find the inverse Laplace transform of $\log \frac{1+s}{s} \cdot 2$

$\log \frac{1+s}{s}$ के प्रतिबिम्ब लाप्लास रूपांतरण को ज्ञात कीजिए।

6. (a) Using Convolution theorem, evaluate $L^{-1} \left\{ \frac{1}{(s-1)(s+3)} \right\}$.

संवलन प्रमेय का प्रयोग करते हुए $L^{-1} \left\{ \frac{1}{(s-1)(s+3)} \right\}$ का मान निकालिए।

(4)

- (b) Solve the following equation by Laplace transform method : 2

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + y = t, \text{ where } y(0) = 1, y'(0) = -2$$

लाप्लास रूपांतरण प्रणाली से निम्न समीकरण को हल कीजिए :

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + y = t, \text{ जहाँ } y(0) = 1, y'(0) = -2$$

SECTION - IV

खण्ड - IV

7. (a) Find the Fourier transform of the step function : 2 $\frac{1}{2}$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{2\pi}}{2l}, & -l < x < l \\ 0, & |x| > l \end{cases}$$

श्रेणी फलन $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{2\pi}}{2l}, & -l < x < l \\ 0, & |x| > l \end{cases}$ के फोरियर

रूपांतरण को ज्ञात कीजिए।

(5)

इसे दिखाने के लिए जैकोबी श्रेणी का उपयोग कीजिए :

$$[J_0(x)]^2 + 2[J_1(x)]^2 + 2[J_2(x)]^2 + \dots = 1$$

SECTION - II

खण्ड - II

(b) Find the Fourier sine and cosine transform of $f(x)$ where :

$$f(x) \begin{cases} 1, & 0 \leq x < 1 \\ 0, & x > 1 \end{cases}$$

$f(x)$ के फोरियर ज्या तथा कोज्या रूपान्तरण को ज्ञात कीजिए :

$$f(x) \begin{cases} 1, & 0 \leq x < 1 \\ 0, & x > 1 \end{cases}$$

8. (a) Find $f(x)$ if $F_S \{f(x)\} = \frac{16(-1)^{n-1}}{n^3}$, if $0 < x < 8$, where $n = 1, 2, 3, \dots$

$f(x)$ ज्ञात कीजिए यदि $F_S \{f(x)\} = \frac{16(-1)^{n-1}}{n^3}$, यदि $0 < x < 8$, जहाँ $n = 1, 2, 3, \dots$

(b) Use finite Fourier cosine transform to solve $\frac{\partial u}{\partial t} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; $0 < x < \pi$, $t > 0$ with the boundary condition $\frac{\partial u}{\partial x} = 0$, when $x = 0$ and $x = \pi$, $t > 0$ and the initial condition is $u = f(x)$ when $t = 0$, $0 < x < \pi$.

(6)

3. (a) Express the following in terms of Legendre polynomials $x^4 + 2x^3 + 2x^2 - x - 3$.

निम्न को लीजेन्ड्रे बहुपद के पदों में व्यक्त कीजिए :

$$x^4 + 2x^3 + 2x^2 - x - 3$$

(b) Prove that :

$$\int_{-1}^1 P_n(x)(1-2xt+t^2)^{\frac{1}{2}} dx = \frac{2t^n}{2n+1}$$

सिद्ध कीजिए कि :

$$\int_{-1}^1 P_n(x)(1-2xt+t^2)^{\frac{1}{2}} dx = \frac{2t^n}{2n+1}$$

4. (a) Prove that :

$$H_5(x) = 32x^5 - 160x^3 + 120x$$

सिद्ध कीजिए कि :

$$H_5(x) = 32x^5 - 160x^3 + 120x$$

(b) Prove that :

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-x^2} [H_n(x)]^2 dx = \sqrt{\pi} 2^n n! \left[n + \frac{1}{2} \right]$$

(3) P. T. O.